EGZAMIN MATURALNY
W ROKU SZKOLNYM 2013/2014

MATEMATYKA
POZIOM PODSTAWOWY

ROZWIĄZANIA ZADAŃ
I SCHEMAT PUNKTOWANIA

SIERPIEŃ 2014

Klucz punktowania zadań zamkniętych

Nr zad.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
Odp.	A	A	B	B	C	B	B	D	A	D	C	D	B	D	C	C	C	B	D	C	C	D	D	A	A

Schemat oceniania zadań otwartych

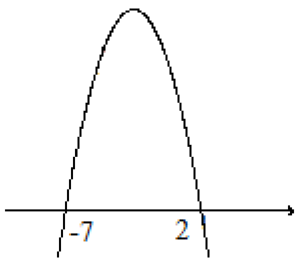
Zadanie 26. (0–2)

Rozwiąż nierówność $-x^2-5x+14<0$.

Rozwiązanie

Ze wzorów $x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$, $x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ na pierwiastki trójmianu kwadratowego otrzymujemy: $x_1=2$, $x_2=-7$.

Szkicujemy parabolę, której ramiona skierowane są ku dołowi i zaznaczamy na osi argumentów jej miejsca zerowe.



Odczytujemy zbiór rozwiązań: $x\in(-\infty,-7)\cup(2,\infty)$.

Schemat oceniania

Zdający otrzymuje ....1 p.

gdy:

- prawidłowo obliczy pierwiastki trójmianu kwadratowego $x_1=2$, $x_2=-7$ i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy

albo

- rozłoży trójmian kwadratowy $x^2+5x-14$ na czynniki liniowe i zapisze nierówność $(x+7)(x-2)>0$ i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy

albo

- popełni błąd rachunkowy przy obliczaniu pierwiastków trójmianu kwadratowego i konsekwentnie do popełnionego błędu rozwiąże nierówność, np. $x_1=7$, $x_2=2$, $x\in(-\infty,2)\cup(7,\infty)$

albo

- doprowadzi nierówność do postaci $\left|x+\frac{5}{2}\right|>\frac{9}{2}$ (na przykład z postaci $\left(x+\frac{5}{2}\right)^2-\frac{81}{4}>0$) i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy.

Zdający otrzymuje ....2 p.
gdy poda odpowiedź w postaci:

- $x\in(-\infty,-7)\cup(2,\infty)$

albo

- $x<-7$ lub $x>2$

albo

- $x<-7$, $x>2$

albo

- w postaci graficznej z poprawnie zaznaczonymi końcami przedziałów.

Zadanie 27. (0–2)

Rozwiąż równanie $x^3-6x^2-11x+66=0$.

Rozwiązanie I sposób (*grupowanie wyrazów*)
Stosując metodę grupowania otrzymujemy:
$x^2(x-6)-11(x-6)=0$ albo $x\left(x^2-11\right)-6\left(x^2-11\right)=0$, stąd $(x-6)\left(x^2-11\right)=0$, zatem $x=6$ lub $x=\sqrt{11}$, lub $x=-\sqrt{11}$.

Schemat oceniania I sposobu rozwiązania
Zdający otrzymuje ....1 p.
gdy doprowadzi lewą stronę równania do postaci iloczynowej, np.: $(x-6)\left(x^2-11\right)=0$ i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.
Zdający otrzymuje ....2 p.
gdy poda rozwiązanie $x=6$ lub $x=\sqrt{11}$, lub $x=-\sqrt{11}$.

Uwaga
Zdający może od razu zapisać rozkład na czynniki. Jeśli na tym poprzestanie lub błędnie poda rozwiązanie równania to otrzymuje **1 punkt**.

Rozwiązanie II sposób *(dzielenie)*
Sprawdzamy, że $W(6)=6^3-6\cdot6^2-11\cdot6+66=0$, więc jednym z pierwiastków tego wielomianu jest $x=6$.
Dzielimy wielomian przez dwumian $x-6$ i otrzymujemy x^2-11. Mamy więc równanie postaci $(x-6)\left(x^2-11\right)=0$, a stąd otrzymujemy $x=6$ lub $x=\sqrt{11}$, lub $x=-\sqrt{11}$.

Schemat oceniania II sposobu rozwiązania
Zdający otrzymuje ....1 p.
gdy wykona dzielenie wielomianu przez dwumian $x-6$, otrzyma iloraz x^2-11 i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.
Zdający otrzymuje ....2 p.
gdy poda rozwiązanie $x=6$ lub $x=\sqrt{11}$, lub $x=-\sqrt{11}$.

Uwaga
Jeżeli w zapisie rozwiązania występuje jedna usterka, to za takie rozwiązanie zdający może otrzymać co najwyżej **1 punkt**.

Zadanie 28. (0–2)
Wykaż, że suma sześcianów trzech kolejnych liczb naturalnych parzystych jest podzielna przez 24.

Rozwiązanie I sposób
Zapiszmy trzy kolejne liczby naturalne parzyste w postaci $2n$, $2n+2$, $2n+4$, gdzie n jest liczbą naturalną.
Wówczas suma sześcianów tych trzech liczb jest równa:

$$(2n)^3+(2n+2)^3+(2n+4)^3=8n^3+8n^3+24n^2+24n+8+8n^3+48n^2+96n+64=$$
$$=24n^3+72n^2+120n+72=24\left(n^3+3n^2+5n+3\right)=24\cdot l$$

Liczba postaci $24\cdot l$, gdzie l jest liczb naturalną jest podzielna przez 24.

Uwaga
Zdający może zapisać trzy kolejne liczby naturalne parzyste w innej postaci, np.: $2n+2$, $2n+4$, $2n+6$, gdzie n jest liczbą naturalną.

Schemat oceniania I sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje .... 1 p.

gdy zapisze sumę sześcianów trzech kolejnych liczb naturalnych parzystych w postaci:
$(2n)^3+(2n+2)^3+(2n+4)^3=24\left(n^3+3n^2+5n+3\right)$.

Zdający otrzymuje .... 2 p.

gdy przeprowadzi pełne rozumowanie.

Rozwiązanie II sposób
Zapiszmy trzy kolejne liczby naturalne parzyste w postaci $2n$, $2n+2$, $2n+4$, gdzie n jest liczbą naturalną.
Wówczas suma sześcianów tych trzech liczb jest równa:

$$(2n)^3+(2n+2)^3+(2n+4)^3=(2n)^3+\left(2(n+1)\right)^3+\left(2(n+2)\right)^3=8\left(n^3+(n+1)^3+(n+2)^3\right)=$$
$$=8\left(3n^3+9n^2+15n+9\right)=24\left(n^3+3n^2+5n+3\right).$$

Liczba postaci $24 \cdot l$, gdzie l jest liczb naturalną jest podzielna przez 24.

Schemat oceniania II sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje .... 1 p.

gdy zapisze sumę sześcianów trzech kolejnych liczb naturalnych parzystych w postaci:
$(2n)^3 + (2n+2)^3 + (2n+4)^3 = 24\left(n^3 + 3n^2 + 5n + 3\right)$.

Zdający otrzymuje .... 2 p.

gdy przeprowadzi pełne rozumowanie.

Rozwiązanie III sposób

Zapiszmy trzy kolejne liczby naturalne parzyste w postaci $n-2$, n, $n+2$, gdzie n jest parzystą liczbą środkową i $n \geq 2$.
Wówczas suma sześcianów tych trzech liczb jest równa:

$$(n-2)^3 + n^3 + (n+2)^3 = n^3 - 6n^2 + 12n - 8 + n^3 + n^3 + 6n^2 + 12n + 8 = 3n^3 + 24n$$

n jest liczbą parzystą, stąd n^3 jest podzielne przez 8.

Zatem liczba $3n^3$ jest podzielna przez 24.

Schemat oceniania III sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje .... 1 p.

gdy zapisze sumę sześcianów trzech kolejnych liczb naturalnych parzystych w postaci:
$(n-2)^3 + n^3 + (n+2)^3 = 3n^3 + 24n$.

Zdający otrzymuje .... 2 p.

gdy przeprowadzi pełne rozumowanie.

Rozwiązanie IV sposób

Zapiszmy trzy kolejne liczby naturalne parzyste w postaci $2n-2$, $2n$, $2n+2$, gdzie n jest liczbą naturalną.
Wówczas suma sześcianów tych trzech liczb jest równa:

$$(2n-2)^3 + (2n)^3 + (2n+2)^3 = 8\left[(n-1)^3 + n^3 + (n+1)^3\right] =$$
$$= 8\left(n^3 - 3n^2 + 3n - 1 + n^3 + n^3 + 3n^2 + 3n + 1\right) = 8\left(3n^3 + 6n\right) = 24\left(n^3 + 2n\right).$$

Liczba postaci $24 \cdot l$, gdzie l jest liczb naturalną jest podzielna przez 24.

Schemat oceniania IV sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje .... 1 p.

gdy zapisze sumę sześcianów trzech kolejnych liczb naturalnych parzystych w postaci:
$(2n-2)^3 + (2n)^3 + (2n+2)^3 = 24\left(n^3 + 2n\right)$.

Zdający otrzymuje .... 2 p.

gdy przeprowadzi pełne rozumowanie.

Zadanie 29. (0–2)

Kąt α jest ostry oraz $\frac{4}{\sin^2\alpha}+\frac{4}{\cos^2\alpha}=25$. Oblicz wartość wyrażenia $\sin\alpha\cdot\cos\alpha$.

<u>Rozwiązanie I sposób</u>

Sprowadzamy wyrażenie $\frac{4}{\sin^2\alpha}+\frac{4}{\cos^2\alpha}=25$ do wspólnego mianownika i otrzymujemy $\frac{4\left(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\right)}{\sin^2\alpha\cos^2\alpha}=25$. Korzystając z tożsamości $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$, otrzymujemy $\frac{4}{\sin^2\alpha\cos^2\alpha}=25$, a stąd $\sin^2\alpha\cos^2\alpha=\frac{4}{25}$, a zatem $\sin\alpha\cos\alpha=\frac{2}{5}$ (kąt α jest ostry).

<u>Schemat oceniania I sposobu rozwiązania</u>

Zdający otrzymuje .... 1 p.

gdy:

- sprowadzi wyrażenie $\frac{4}{\sin^2\alpha}+\frac{4}{\cos^2\alpha}=25$ do wspólnego mianownika i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

albo

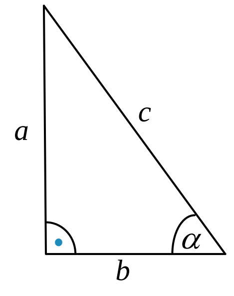
- doprowadzi wyrażenie do postaci $4\left(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\right)=25\sin^2\alpha\cos^2\alpha$ i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

Zdający otrzymuje .... 2 p.

gdy obliczy, że $\sin\alpha\cos\alpha=\frac{2}{5}$.

<u>Rozwiązanie II sposób</u>

Rysujemy trójkąt prostokątny, w którym oznaczamy długości przyprostokątnych przez *a* i *b* oraz zaznaczamy kąt ostry α taki, że $\sin\alpha=\frac{a}{c}$ lub $\cos\alpha=\frac{b}{c}$.



Korzystając z twierdzenia Pitagorasa, wyznaczamy długość przeciwprostokątnej:
$c^2 = a^2 + b^2$.

Ponieważ $\frac{4}{\sin^2\alpha} + \frac{4}{\cos^2\alpha} = 25$, więc $\frac{4c^2}{a^2} + \frac{4c^2}{b^2} = 25$, czyli $\frac{4c^2\left(a^2+b^2\right)}{a^2b^2} = 25$. Stąd $\frac{4c^2c^2}{a^2b^2} = 25$.

Ponieważ $\sin^2\alpha = \frac{a^2}{c^2}$ i $\cos^2\alpha = \frac{b^2}{c^2}$, to $\sin^2\alpha\cos^2\alpha = \frac{4}{25}$. Zatem $\sin\alpha\cos\alpha = \frac{2}{5}$ (kąt α jest ostry).

<u>Schemat oceniania II sposobu rozwiązania</u>

Zdający otrzymuje .... 1 p.

gdy narysuje trójkąt prostokątny o przyprostokątnych długości a i b, zaznaczy w tym trójkącie kąt α i zapisze:

- $\sin\alpha = \frac{a}{c}$, $\cos\alpha = \frac{b}{c}$ i $\frac{4c^2c^2}{a^2b^2} = 25$ i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

albo

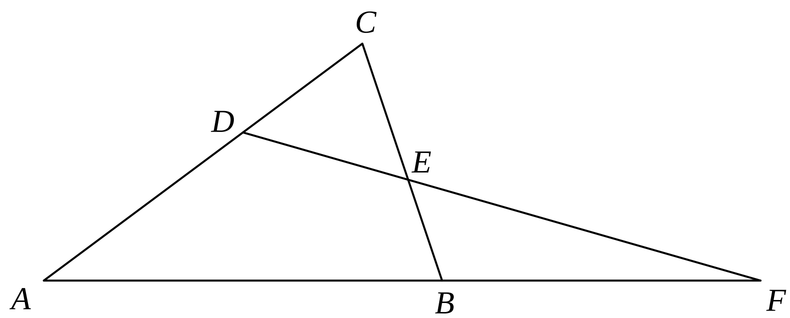
- $\sin\alpha = \frac{a}{c}$, $\cos\alpha = \frac{b}{c}$ i $4c^2c^2 = 25a^2b^2$ i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Zdający otrzymuje .... 2 p.

gdy obliczy, że $\sin\alpha\cos\alpha = \frac{2}{5}$.

Zadanie 30. (0–2)

Dany jest trójkąt *ABC*, w którym $|AC| > |BC|$. Na bokach *AC* i *BC* tego trójkąta obrano odpowiednio takie punkty *D* i *E*, że zachodzi równość $|CD| = |CE|$. Proste *AB* i *DE* przecinają się w punkcie *F* (zobacz rysunek). Wykaż, że $|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle ABC| - 2\cdot|\sphericalangle AFD|$.



Rozwiązanie I sposób

Niech $|\sphericalangle BAC| = \alpha$, $|\sphericalangle ABC| = \beta$ i $|\sphericalangle AFD| = \gamma$.

Ponieważ $|\sphericalangle ABC| = \beta$, stąd $|\sphericalangle FBE| = 180° - \beta$ (z własności kątów przyległych).

$|\sphericalangle BEF| = 180° - (180° - \beta + \gamma) = \beta - \gamma$ (z sumy miar kątów wewnętrznych w trójkącie *BEF*).

Ponieważ $|\sphericalangle BEF| = \beta - \gamma$, więc $|\sphericalangle CED| = \beta - \gamma$ (z własności kątów wierzchołkowych).

W trójkącie *CDE*, mamy $|CD| = |CE|$, zatem $|\sphericalangle CDE| = \beta - \gamma$.

$|\sphericalangle DCE| = |\sphericalangle ACB| = 180° - (\beta - \gamma + \beta - \gamma) = 180° - 2\beta + 2\gamma$ (z sumy miar kątów wewnętrznych w trójkącie *DCE*).

$|\sphericalangle BAC| + |\sphericalangle ABC| + |\sphericalangle ACB| = 180°$, stąd $\alpha + \beta + 180° - 2\beta + 2\gamma = 180°$ (z sumy miar kątów wewnętrznych w trójkącie *DCE*). Zatem $\alpha = \beta - 2\gamma$.

Schemat oceniania I sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje .... 1 p.

gdy zapisze zależności między miarami kątów w trójkątach *BEF* i *CDE*, np.: $|\sphericalangle BEF| = \beta - \gamma$ i $|\sphericalangle DCE| = 180° - 2\beta + 2\gamma$.

Zdający otrzymuje .... 2 p.

gdy przeprowadzi pełne rozumowanie np.: zapisze że $|\sphericalangle DCE| = |\sphericalangle ACB|$ i $|\sphericalangle BAC| + |\sphericalangle ABC| + |\sphericalangle ACB| = 180°$, stąd $\alpha = \beta - 2\gamma$.

Rozwiązanie II sposób

Niech $|\sphericalangle BAC| = \alpha$, $|\sphericalangle ABC| = \beta$, $|\sphericalangle AFD| = \gamma$ i $|\sphericalangle CDE| = \delta$.

Trójkąt *CDE* jest równoramienny, stąd $|\sphericalangle CDE| = |\sphericalangle CED| = \delta$.

Ponieważ $|\sphericalangle CED| = \delta$, stąd $|\sphericalangle BEF| = \delta$ (z własności kątów wierzchołkowych).

Zatem $\beta = \gamma + \delta$ ($|\sphericalangle ABC| = \beta$ jest kątem zewnętrznym trójkąta *BEF*). Stąd $\beta - \gamma = \delta$

Ponieważ $|\sphericalangle CDE| = \delta$, stąd $|\sphericalangle ADE| = 180° - \delta$ (z własności kątów przyległych).

Podobnie $|\sphericalangle CED| = \delta$, stąd $|\sphericalangle BED| = 180° - \delta$ (z własności kątów przyległych).

$|\sphericalangle BAC| + |\sphericalangle ABC| + |\sphericalangle BED| + |\sphericalangle ADE| = 360°$ (z sumy miar kątów wewnętrznych w czworokącie *ABED*), stąd $\alpha + \beta + 180° - \delta + 180° - \delta = 360°$. Zatem $\frac{\alpha + \beta}{2} = \delta$.

Z powyższych rozważań mamy $\beta - \gamma = \delta$ i $\frac{\alpha + \beta}{2} = \delta$, stąd $\alpha = \beta - 2\gamma$.

Schemat oceniania II sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje .... 1 p.

gdy zapisze zależności między miarami kątów w trójkącie *CDE* i czworokącie *ABED*, np.: $|\sphericalangle CDE| = |\sphericalangle CED| = \delta$ i $\alpha + \beta + 180° - \delta + 180° - \delta = 360°$.

Zdający otrzymuje .... 2 p.

gdy przeprowadzi pełne rozumowanie np.: zapisze że $\beta - \gamma = \delta$ i $\frac{\alpha + \beta}{2} = \delta$, stąd $\alpha = \beta - 2\gamma$.

Zadanie 31. (0–2)

Dany jest ciąg arytmetyczny (a_n) określony dla $n \geq 1$, w którym $a_5 = 22$ oraz $a_{10} = 47$. Oblicz pierwszy wyraz a_1 i różnicę r tego ciągu.

Rozwiązanie

Wykorzystując wzór na *n*-ty wyraz ciągu arytmetycznego zapisujemy piąty i dziesiąty wyraz tego ciągu w zależności od wyrazu pierwszego a_1 i różnicy r: $a_5 = a_1 + 4r$ i $a_{10} = a_1 + 9r$.

Zapisujemy układ równań, np.: $\begin{cases} a_1 + 4r = 22 \\ a_1 + 9r = 47 \end{cases}$.

Obliczamy pierwszy wyraz ciągu a_1 i różnicę r: $a_1 = 2$ i $r = 5$.

Schemat oceniania

Zdający otrzymuje .... 1 p.

gdy zapisze układ równań z niewiadomymi a_1 i r: $\begin{cases} a_1 + 4r = 22 \\ a_1 + 9r = 47 \end{cases}$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Zdający otrzymuje .... 2 p.

gdy obliczy pierwszy wyraz ciągu a_1 i różnicę r: $a_1 = 2$ oraz $r = 5$.

Zadanie 32. (0–5)

Miasta A i B są odległe o 450 km. Pani Danuta pokonała tę trasę swym samochodem w czasie o 75 minut dłuższym niż pani Lidia. Wartość średniej prędkości, z jaką jechała pani Danuta na całej trasie była o 18 km/h mniejsza od wartości średniej prędkości, z jaką jechała pani Lidia. Oblicz średnie wartości:

- prędkości, z jaką pani Danuta jechała z A do B.
- prędkości, z jaką pani Lidia jechała z A do B.

Rozwiązanie I sposób

Przyjmujemy oznaczenia v i t – odpowiednio prędkość w km/h i czas w godzinach dla pani Lidii.

Zapisujemy zależność między drogą, prędkością i czasem dla pani Lidii: $v \cdot t = 450$.

Zapisujemy prędkość i czas jazdy dla pani Danuty: $v-18$, $t+\frac{5}{4}$.

Zapisujemy układ równań, np. $\begin{cases} v \cdot t = 450 \\ (v-18)\cdot\left(t+\frac{5}{4}\right)=450 \end{cases}$.

Z pierwszego równania wyznaczamy

$t=\frac{450}{v}$	$v=\frac{450}{t}$
podstawiamy do drugiego równania i rozwiązujemy	
$(v-18)\cdot\left(\frac{450}{v}+\frac{5}{4}\right)=450$ Przekształcamy to równanie do równania kwadratowego, np. $v^2-18v-6480=0$. $\Delta=324+25920=162^2$ $v_1=\frac{18-162}{2}=-72$, sprzeczne z zał. $v>0$ $v_2=\frac{18+162}{2}=90\,(\text{km/h})$ obliczamy prędkość drugiej pani $v-18=72\,(\text{km/h})$	$\left(\frac{450}{t}-18\right)\cdot\left(t+\frac{5}{4}\right)=450$ Przekształcamy to równanie do równania kwadratowego, np. $4t^2+5t-125=0$. $\Delta=25+2000=45^2$ $t_1=\frac{-5-45}{8}=-\frac{50}{8}$, sprzeczne z zał. $t>0$ $t_2=\frac{-5+45}{8}=5\,(\text{h})$ obliczamy prędkość pani Lidii $v=\frac{450}{5}=90\,(\text{km/h})$ obliczamy prędkość drugiej pani $v-18=72\,(\text{km/h})$
Odp.: Prędkości, z jakimi jechały panie, są równe: 90 km/h (pani Lidia) i 72 km/h (pani Danuta).	

Rozwiązanie II sposób

Przyjmujemy oznaczenia v i t – odpowiednio prędkość w km/h i czas w godzinach dla pani Danuty.

Zapisujemy zależność między drogą, prędkością i czasem dla pani Danuty: $v \cdot t = 450$.

Zapisujemy prędkość i czas jazdy dla pana Lidii: $v+18$, $t-\frac{5}{4}$.

Zapisujemy układ równań, np. $\begin{cases}(v+18)\cdot\left(t-\frac{5}{4}\right)=450\\ v\cdot t=450\end{cases}$

Z drugiego równania wyznaczamy

<table>
<tr><td>$t=\frac{450}{v}$</td><td>$v=\frac{450}{t}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">podstawiamy do pierwszego równania i rozwiązujemy</td></tr>
<tr><td>$(v+18)\cdot\left(\frac{450}{v}-\frac{5}{4}\right)=450$
Przekształcamy to równanie do równania kwadratowego, np. $v^2+18v-6480=0$.
$\Delta=324+25920=162^2$
$v_1=\frac{-18-162}{2}=-90$, sprzeczne z zał.
$v>0$
$v_2=\frac{-18+162}{2}=72\,(\text{km/h})$
obliczamy prędkość pani Lidii
$v+18=90\,(\text{km/h})$</td><td>$\left(\frac{450}{t}+18\right)\cdot\left(t-\frac{5}{4}\right)=450$
Przekształcamy to równanie do równania kwadratowego, np. $4t^2-5t-125=0$.
$\Delta=25+2000=45^2$
$t_1=\frac{5-45}{8}=-5$, sprz. z zał. $t>0$
$t_2=\frac{5+45}{8}=6\frac{1}{4}$ (h)
obliczamy prędkość pani Danuty
$v=\frac{450}{6\frac{1}{4}}=72$ (km/h)
obliczamy prędkość pani Lidii
$v+18=90$ (km/h)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Odp.: Prędkości, z jakimi jechały panie, są równe: 90 km/h (pani Lidia) i 72 km/h (pani Danuta).</td></tr>
</table>

<u>**Schemat oceniania I i II sposobu rozwiązania**</u>

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania .... 1 p.

- Zapisanie zależności między drogą, prędkością i czasem dla jednej z pań oraz prędkości i czasu dla obu pań przy użyciu tych samych oznaczeń,

  np.: dla pani Lidii $v\cdot t=450$, czas pani Danuty $t+\frac{5}{4}$, prędkość pani Danuty $v-18$.

  lub: dla pani Danuty $v\cdot t=450$, czas pani Lidii $t-\frac{5}{4}$, prędkość pani Lidii $v+18$.

<u>**Uwaga**</u>

Nie wymagamy opisania oznaczeń literowych, jeżeli z rozwiązania można wywnioskować, że zdający poprawnie je stosuje.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 p.

- Zapisanie układu równań z niewiadomymi v i t – odpowiednio z prędkością i czasem dla pani Lidii: $\begin{cases} v\cdot t=450 \\ (v-18)\cdot\left(t+\frac{5}{4}\right)=450 \end{cases}$.

albo

- Zapisanie układu równań z niewiadomymi v i t – odpowiednio z prędkością i czasem dla pani Danuty: $\begin{cases} (v+18)\cdot\left(t-\frac{5}{4}\right)=450 \\ v\cdot t=450 \end{cases}$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 p.

Zapisanie równania z jedną niewiadomą, np:

$(v-18)\cdot\left(\frac{450}{v}+\frac{5}{4}\right)=450$ lub $\left(\frac{450}{t}-18\right)\cdot\left(t+\frac{5}{4}\right)=450$, lub $(v+18)\cdot\left(\frac{450}{v}-\frac{5}{4}\right)=450$,

lub $\left(\frac{450}{t}+18\right)\cdot\left(t-\frac{5}{4}\right)=450$.

Uwaga

Zdający nie musi zapisywać układu równań, może bezpośrednio zapisać równanie z jedną niewiadomą.

Rozwiązanie zadania do końca lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) .... 4 p.

- rozwiązanie równania z niewiadomą v z błędem rachunkowym i konsekwentne obliczenie drugiej prędkości

albo

- rozwiązanie równania z niewiadomą t bezbłędnie i nieobliczenie prędkości obu pań

albo

- obliczenie t z błędem rachunkowym i konsekwentne obliczenie prędkości obu pań.

Rozwiązanie pełne .... 5 p.

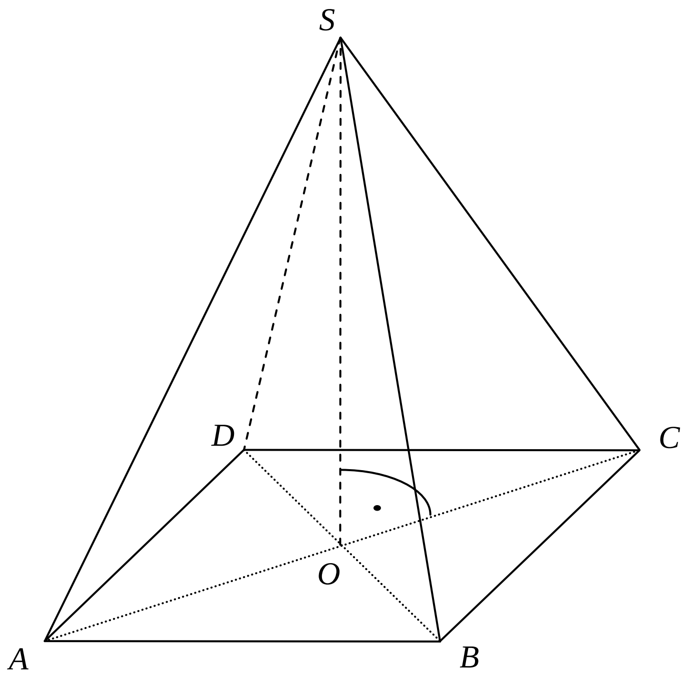
Obliczenie prędkości obu pań: 90 km/h i 72 km/h.

Uwagi

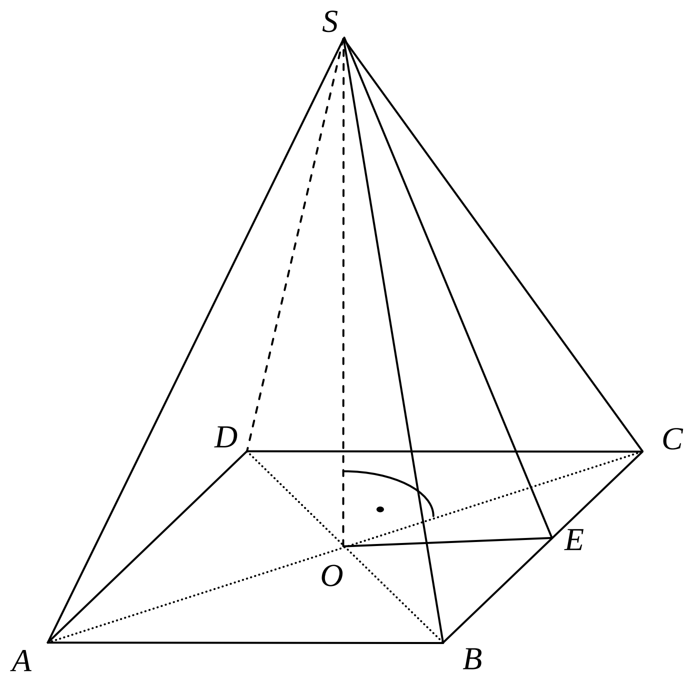
1. Jeżeli zdający podaje (bez obliczeń) jedną prędkość: 90 km/h lub 72 km/h, to otrzymuje **0 pkt.**
2. Jeżeli zdający podaje (bez obliczeń) prędkości obu pań: 90 km/h i 72 km/h, to otrzymuje **1 pkt**.
3. Jeżeli zdający pokonał zasadnicze trudności zadania, ale w trakcie ich pokonywania zostały popełnione błędy rachunkowe lub usterki, to może otrzymać **2 pkt** za całe rozwiązanie.

Zadanie 33. (0–4)

Podstawą ostrosłupa prawidłowego jest kwadrat. Wysokość ściany bocznej tego ostrosłupa jest równa 22, a tangens kąta nachylenia ściany bocznej ostrosłupa do płaszczyzny jego podstawy jest równy $\frac{4\sqrt{6}}{5}$. Oblicz objętość tego ostrosłupa.



<u>Rozwiązanie</u>



Niech $|ES| = h = 22$, $|AB| = a$, $|OE| = \frac{a}{2}$, $|SO| = H$.

Podany tangens kąta to stosunek $\frac{|SO|}{|OE|}$. Zatem $\frac{H}{\frac{a}{2}} = \frac{4\sqrt{6}}{5}$.

Trójkąt *SOE* jest prostokątny. Zatem $H^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = 484$.

Rozwiążemy układ równań $\begin{cases} \frac{H}{\frac{a}{2}} = \frac{4\sqrt{6}}{5} \\ H^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = 484 \end{cases}$.

1) Obliczamy z pierwszego równania *H*: $5H = 2\sqrt{6}a$, czyli $H = \frac{2\sqrt{6}}{5}a$.
2) Podstawiamy wyznaczoną wartość do równania stopnia drugiego i otrzymujemy równanie: $\frac{121}{100}a^2 = 484$.
3) Obliczamy *a* (długość krawędzi podstawy): $a = 20$.
4) Obliczamy *H* (wysokość ostrosłupa): $H = 8\sqrt{6}$.
5) Obliczamy objętość ostrosłupa: $V = \frac{1}{3}\cdot a^2 \cdot H = \frac{1}{3}\cdot 20^2 \cdot 8\sqrt{6}$.

Objętość ostrosłupa jest równa: $V = \frac{3200}{3}\sqrt{6}$.

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania .... 1 p.

Zapisanie zależności pomiędzy długością krawędzi podstawy ostrosłupa a wysokością ostrosłupa, wynikającej z podanej wartości tangensa kąta nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy: $\frac{H}{\frac{a}{2}} = \frac{4\sqrt{6}}{5}$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 p.

Zapisanie dwóch zależności pomiędzy długością krawędzi podstawy ostrosłupa a wysokością ostrosłupa, pozwalających na wyznaczenie obu tych wielkości:

np. zapisanie układu równań $\begin{cases} \dfrac{H}{\frac{a}{2}} = \dfrac{4\sqrt{6}}{5} \\ H^2 + \left(\dfrac{a}{2}\right)^2 = 484 \end{cases}$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... **3 p.**

Obliczenie długości krawędzi podstawy i wysokości ostrosłupa: $a = 20$ i $H = 8\sqrt{6}$.

Rozwiązanie pełne .... **4 p.**

Obliczenie objętości ostrosłupa: $V = \dfrac{3200}{3}\sqrt{6}$.

Zadanie 34. (0–4)

Zbiór *M* tworzą wszystkie liczby naturalne dwucyfrowe, w zapisie których występują dwie różne cyfry spośród: 1, 2, 3, 4, 5. Ze zbioru *M* losujemy jedną liczbę, przy czym każda liczba z tego zbioru może być wylosowana z tym samym prawdopodobieństwem. Oblicz prawdopodobieństwo, że wylosujemy liczbę większą od 20, w której cyfra dziesiątek jest mniejsza od cyfry jedności.

<u>**I sposób rozwiązania**</u> (model klasyczny)

Zdarzeniami elementarnymi są liczby ze zbioru *M*. Możemy je utożsamiać z ciągami (a,b), których wyrazami są liczby ze zbioru $\{1,2,3,4,5\}$. Mamy do czynienia z modelem klasycznym.

Liczba wszystkich zdarzeń elementarnych jest równa $|\Omega| = 5\cdot 4 = 20$.

Niech *A* oznacza zdarzenie, że wylosowana liczba jest większa niż 20 i jej cyfra dziesiątek jest mniejsza od cyfry jedności. Zdarzeniu temu sprzyjają zdarzenia elementarne (a,b) takie, że $a \in \{2,3,4,5\}$ oraz $a < b$. Zatem liczba zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu *A* jest równa $|A| = 3+2+1 = 6$.

Łatwo możemy tez zapisać wszystkie zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu *A*, czyli

$$\begin{aligned} A = \{&(2,3),(2,4),(2,5),\\ &(3,4),(3,5),\\ &(4,5)\} \end{aligned}$$

Prawdopodobieństwo zdarzenia *A* jest zatem równe

$$P(A) = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}.$$

<u>**Schemat oceniania I sposobu rozwiązania**</u>

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania ....**1 pkt**

Zdający

- obliczy liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych: $|\Omega| = 20$

albo

- opisze zdarzenie sprzyjające np. w postaci (a,b), gdzie $a \in \{2,3,4,5\}$ oraz $a < b$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ....2 pkt
Zdający

- opisze zdarzenie sprzyjające np. w postaci (a,b), gdzie $a \in \{2,3,4,5\}$ oraz $a < b$
  i obliczy ich liczbę: $|A| = 6$

albo

- obliczy liczbę wszystkich możliwych zdarzeń elementarnych: $|\Omega| = 20$ i opisze zdarzenie sprzyjające np. w postaci (a,b), gdzie $a \in \{2,3,4,5\}$ oraz $a < b$

albo

- zapisze wszystkie zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu: $(2,3)$, $(2,4)$, $(2,5)$, $(3,4)$, $(3,5)$, $(4,5)$.

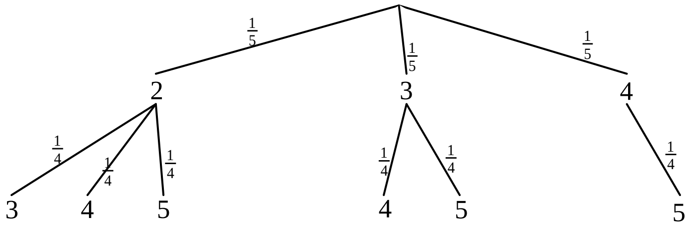
Pokonanie zasadniczych trudności zadania...3 pkt
Zdający obliczy liczbę wszystkich możliwych zdarzeń elementarnych: $|\Omega| = 20$ oraz opisze zdarzenia sprzyjające zdarzeniu *A*, np. w postaci (a,b) takie, że $a \in \{2,3,4,5\}$, gdzie $a < b$ oraz obliczy ich liczbę: $|A| = 6$.

Rozwiązanie pełne ....4 pkt
Zdający obliczy prawdopodobieństwo zdarzenia *A*: $P(A) = \frac{3}{10}$.

<u>Uwagi</u>

1. Jeśli zdający rozwiąże zadanie do końca i otrzyma $P(A) > 1$, to otrzymuje za całe rozwiązanie **0 punktów**.
2. Jeżeli zdający wypisując zdarzenia sprzyjające opuści <u>przez nieuwagę</u> jedno z nich, ale z zapisu wynika, że rozumie istotę doświadczenia i konsekwentnie obliczy prawdopodobieństwo, to za całe rozwiązanie otrzymuje **3 punkty**.
3. Jeżeli zdający wypisze wszystkie zdarzenia sprzyjające, ale popełni błąd przy ich zliczaniu to za całe rozwiązanie otrzymuje **3 punkty**.

<u>II sposób rozwiązania</u> (metoda drzewa)
Niech *A* oznacza zdarzenie, że wylosowana liczba jest większa niż 20 i jej cyfra dziesiątek jest mniejsza od cyfry jedności. Sporządźmy drzewko ilustrujące nasze doświadczenie losowe. Drzewko ograniczymy tylko do jego istotnych gałęzi. Prawdopodobieństwo na kolejnych odcinkach tego drzewa jest równe odpowiednio $\frac{1}{5}$ oraz $\frac{1}{4}$. Zaznaczmy te gałęzie drzewka, które odpowiadają zajściu zdarzenia *A*.



Korzystając ze sporządzonego drzewa obliczamy prawdopodobieństwo zdarzenia A

$$P(A) = 6 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{10}.$$

Schemat oceniania II sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania ....1 pkt

Zdający narysuje drzewo ilustrujące „losowanie” kolejno dwóch różnych cyfr ze zbioru M i przynajmniej na jednym odcinku gałęzi zapisze prawdopodobieństwo.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ....2 pkt

Zdający

- narysuje drzewo z istotnymi gałęziami i przynajmniej na jednej gałęzi zapisze prawdopodobieństwa na wszystkich odcinkach drzewa

albo

- narysuje drzewo z wybranymi istotnymi gałęziami, z którego będzie wynikało, że rozumie istotę doświadczenia i przynajmniej na jednej gałęzi zapisze prawdopodobieństwa na wszystkich odcinkach drzewa.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania ....3 pkt

Zdający

- narysuje drzewo z istotnymi gałęziami, przynajmniej na jednej gałęzi zapisze prawdopodobieństwa na wszystkich odcinkach drzewa i zaznaczy zdarzenia sprzyjające

albo

- narysuje drzewo z wybranymi istotnymi gałęziami, z którego będzie wynikało, że rozumie istotę doświadczenia i przynajmniej na jednej gałęzi zapisze prawdopodobieństwa na wszystkich odcinkach drzewa i zaznaczy zdarzenia sprzyjające.

Rozwiązanie pełne ....4 pkt

Zdający obliczy prawdopodobieństwo zdarzenia A: $P(A) = \frac{3}{10}$.

Uwagi

1. Jeśli zdający rozwiąże zadanie do końca i otrzyma $P(A) > 1$, to otrzymuje za całe rozwiązanie **0 punktów**.
2. Jeżeli zdający opuści przez nieuwagę jedną gałąź (z rysunku będzie wynikało, że rozumie istotę doświadczenia) i konsekwentnie obliczy prawdopodobieństwo, to za całe rozwiązanie otrzymuje **3 punkty**.
3. Jeżeli zdający narysuje wszystkie istotne gałęzie, ale popełni błąd przy ich zliczaniu i konsekwentnie obliczy prawdopodobieństwo to za całe rozwiązanie otrzymuje **3 punkty**.